تغییرشکل سازه‌ها. تغییرشکل سازه‌ها ممکن است به صورت تغییرمکان افقی، تغییرمکان قائم و یا حتی دوران گره‌ها اتفاق افتد و مورد نظر باشد. محاسبه تغییرشکل سازه‌ها به دلایل زیر انجام می‌گردد.

۱) یکی از معیارهای طراحی سازه‌ها تغییرشکل آنهاست. در طراحی سازه‌ها باید کنترل شود که تغییرشکل‌های ایجاد شده از مقدار مجاز آنها کمتر باشد.

۲) تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی به روش نیرو نیازمند نوشتن شرط همسازی (معادله سازگاری) براساس تغییرشکل سازه‌ها است. بنابراین در این روش ابتدا باید تغییرشکل سازه‌ها را محاسبه نمود.

روش‌های محاسبه تغییرشکل سازه‌ها ۱. روش ریاضی یا انتگرال‌گیری مستقیم ۲. استفاده از قضایای گشتاور سطح ۳. روش کار مجازی یا بار واحد ۴. روش تیر مزدوج یا تیر فرضی ۵. قضیه اول کاستیلیانو

نکته: روش ۱، ۲ و ۴ فقط تغییرشکل‌های حاصل از خمش را در نظر می‌گیرند اما روش‌های ۳ و ۵ روش‌های کامل‌تری هستند. چون می‌توانند تغییرشکل‌های حاصل از برش، پیچش و نیروی محوری را نیز لحاظ کنند.

محاسبه تغییرشکل سازه‌ها با انتگرال‌گیری (روش ریاضی)

از درس مقاومت مصالح رابطه اساسی برای خمش خالص تیرها را یادآوری می‌کنیم:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{M}{EI} \qquad (1)$$

که در این رابطه M لنگر خمشی مقطع، I ممان اینرسی، E مدول الاستیسیته و ρ شعاع انحناء مقطع نامیده می‌شود. عبارت $\frac{1}{\rho}$ در اصطلاح انحناء مقطع نامیده می‌شود که برابر است با:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d\theta}{ds} \qquad (2)$$

در رابطه (۲)، θ زاویه چرخش یا دوران و s پارامتر طول قوس است. در ریاضیات هندسی اثبات می‌شود که:

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} \qquad (3)$$

اکنون با توجه به معادلات (۱) تا (۳) می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M}{EI} \qquad (4)$$

با فرض این که تغییرشکل‌های خمشی کوچک هستند می‌توان نوشت

$$1+(y')^2 \cong 1 \qquad (5)$$

یعنی $(y')^2$ آنقدر کوچک است که در مقابل 1 (واحد) از آن صرف نظر می‌شود. بنابراین

$$\frac{1}{\rho} \cong y'' = \frac{M}{EI} \qquad (6)$$

با یک بار انتگرال‌گیری از رابطه مقابل مقدار زاویه شیب یا چرخش بدست می‌آید:

$$y' = \int \frac{M}{EI}\,dx + C \qquad (7)$$

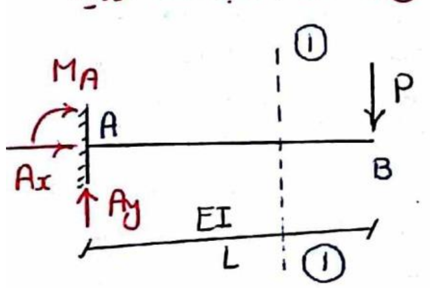
و با انتگرال گیری مجدد داریم:

$$y = \int \left(\int \frac{M}{EI}\,dx \right) dx + Cx + D$$

مسئله مهم در این روش تعیین ثابت‌های انتگرال گیری (C و D) است که با نوشتن شرایط مرزی در تکیه‌گاه‌ها و محل تلاقی اعضاء حاصل می‌شوند.

مثال. در تیر شکل مقابل تابع خیز (تغییرمکان) و شیب (زاویه چرخش یا دوران) را بدست آورید.

طول تیر L و مقدارهای P و EI ثابت هستند.

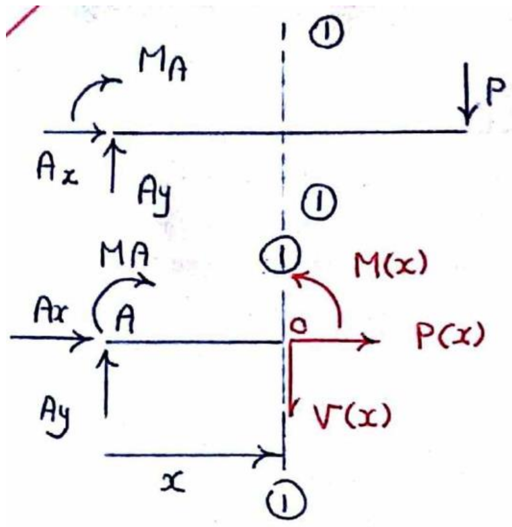


گام اول- محاسبه واکنش‌ها و توابع لنگر خمشی

$$\xrightarrow{+}\sum F_x = 0 \rightarrow \underline{A_x = 0} \qquad +\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow \underline{A_y = P}$$

$$\circlearrowleft^{+} \sum M_A = 0 \rightarrow M_A + (P \times L) = 0 \rightarrow M_A = -PL$$

مشاهده می‌شود که برای تحلیل تیر مقابل یک مقطع بین A تا B کافی است.



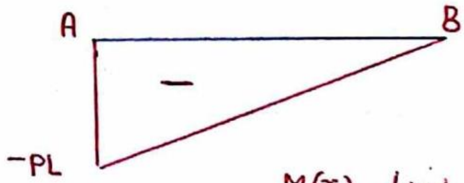
Sec(1-1): $\circlearrowleft \sum M_O = 0$

$$\Rightarrow M_A + (A_y \times x) - M(x) = 0$$

$$M(x) = \underset{-PL}{\cancel{M_A}} + \underset{P}{\cancel{A_y}}\,x$$

$$M(x) = -PL + Px = -P(L-x)$$

node	A		B
x	0	$\longrightarrow$	L
$M(x)$	$-PL$	تابع خطی	0



نمودار $M(x)$

گام دوم - انتگرال گیری.

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{M}{EI} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \int \frac{M}{EI}\,dx$$

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^L \frac{-P(L-x)\,dx}{EI} = \frac{-P}{EI}\int_0^L (L-x)\,dx = -\frac{P}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^L + C$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{-P}{EI}\left(L^2 - \frac{L^2}{2}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \int \frac{-P(L-x)\,dx}{EI} = \frac{-P}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C$$

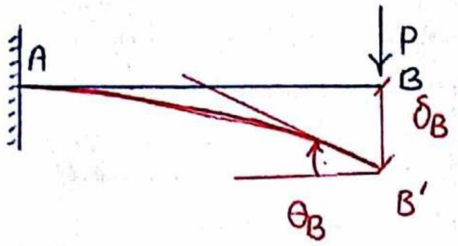
تابع شیب

$$y = \int y'\,dx \Rightarrow y = \int -\frac{P}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C\,dx + D$$

$$\Rightarrow y = \frac{-P}{EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + Cx + D$$

تابع تغییر مکان

گام سوم- رسم تغییرشکل تقریبی تیر و نوشتن شرایط مرزی



در رسم تغییرشکل تقریبی تیر به نکات زیر توجه کنید:

۱- جهت بارگذاری- چون جهت P به سمت پایین است انتظار داریم نقطه B به سمت پایین جابجا شود.

۲- شرایط تکیه‌گاهی- چون تکیه‌گاه A گیردار است، مقدار شیب و تغییرمکان در A برابر با صفر است.

یعنی $\delta_A = 0$ و $\theta_A = 0$

۳- انحناء تیر- با توجه به نمودار لنگر خمشی متوجه می‌شویم که M همواره منفی است. $(-PL \le M < 0)$

بنابراین طبق رابطه $y'' = \frac{M}{EI}$، انحناء در سراسر تیر منفی یعنی به سمت پایین است.

حال می‌توان شرایط مرزی را نوشت:

$$y' = \frac{-P}{EI}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C$$

$$y = -\frac{P}{EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + Cx + D$$

در نقطه A، $\theta_A = 0 \Rightarrow y'(x=0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\delta_A = 0 \Rightarrow y(x=0) = 0 \Rightarrow D = 0$

بنابراین: $\theta \simeq \tan\theta = y' = \frac{-P}{EI}\left[Lx - \frac{x^2}{2}\right]$ تابع شیب

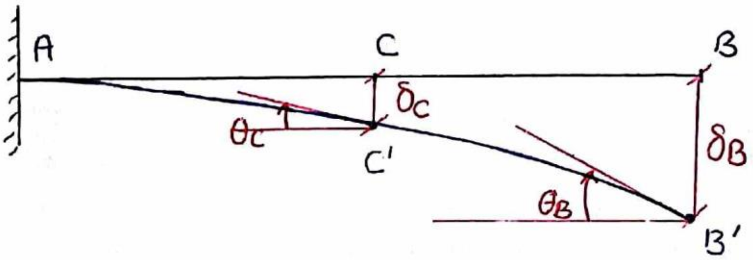
$\delta = y = -\frac{P}{EI}\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]$ تابع تغییرمکان

با استفاده از توابع فوق می‌توان مقدار شیب و تغییرمکان در هر نقطه را محاسبه کرد.

تمرین- در مسئله قبل مقدار شیب و تغییر مکان در وسط و انتهای تیر را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} x = \frac{L}{2} : & y'(x=\frac{L}{2}) = -\frac{P}{EI}\left[L\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{(L/2)^2}{2}\right] = -\frac{PL^2}{8EI} = \theta_C \\ x = \frac{L}{2} : & y(x=\frac{L}{2}) = -\frac{P}{EI}\left[\frac{L(L/2)^2}{2} - \frac{(L/2)^3}{6}\right] = \frac{-5PL^3}{48EI} = \delta_C \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = L : & y'(x=L) = -\frac{P}{EI}\left(L(L) - \frac{(L^2)}{2}\right) = -\frac{PL^2}{2EI} = \theta_B \\ x = L : & y(x=L) = -\frac{P}{EI}\left(\frac{L(L)^2}{2} - \frac{(L)^2}{6}\right) = -\frac{PL^3}{3EI} = \delta_B \end{cases}$$



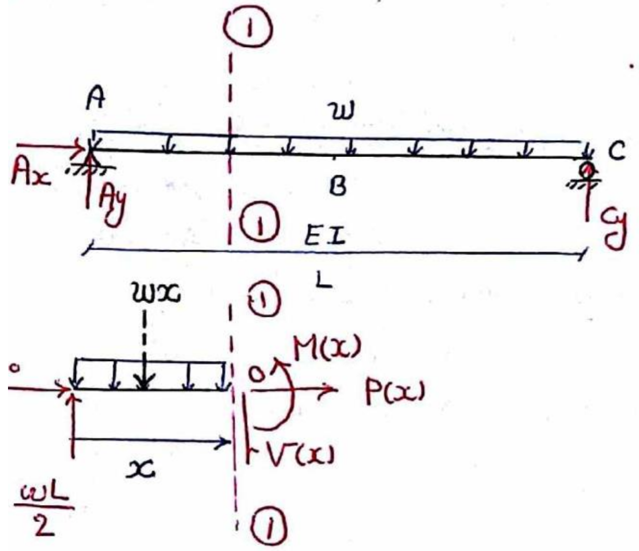
مقایسه شکل تغییریافته تیر و نتایج شیب و تغییر مکان نشان می‌دهد که:

۱) در این روش تغییر مکان به سمت پایین منفی و به سمت بالا مثبت فرض می‌شود.

۲) در این روش زاویه چرخش یا شیب ساعتگرد منفی و پادساعتگرد مثبت لحاظ می‌شود.

نکته: روش انتگرال‌گیری فقط تغییر شکل‌های حاصل از خمش را در نظر می‌گیرد.

تمرین. در تیر شکل مقابل تابع شیب و تغییرمکان را بدست آورید.



گام اول محاسبه واکنش های تکیه گاهی و تابع لنگر خمشی

$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$$

$$\overset{+}{\curvearrowright} \sum M_A = 0 \rightarrow (w \times l) \times \frac{L}{2} - C_y \times L = 0$$

$$\rightarrow C_y = \frac{wL}{2}$$

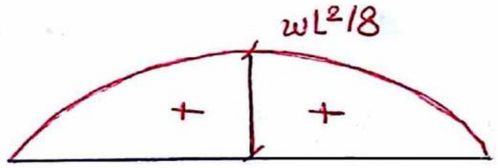
$$+\uparrow \sum F_y = 0 \rightarrow C_y + A_y = wL$$

$$\rightarrow A_y = \frac{wL}{2}$$

مشاهده می شود که به دلیل تقارن تیر، واکنش های تکیه گاهی باهم برابرهستند $(A_y = C_y)$

$$\overset{+}{\circlearrowleft} \sum M_O = 0 \rightarrow +(\underset{wL/2}{\cancel{A_y}} \times x) - (wx \times \frac{x}{2}) - M(x) = 0$$

$$\rightarrow M(x) = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2} \rightarrow M(x) = \frac{w}{2}(Lx - x^2)$$



node	A	B	C	Func.
x	0	$\frac{L}{2}$	L	---
M	0	$\frac{wL^2}{8}$	0	منحنی n=2

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{M}{EI} \rightarrow y' = \int \frac{M}{EI} dx + C'$$

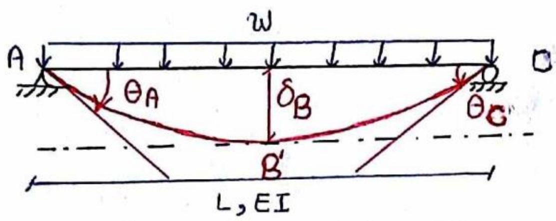
گام دوم - انتگرال گیری

$$y' = \int \frac{w}{2EI}(Lx - x^2)dx + C' \rightarrow y' = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C \quad (1)$$

$$y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow y = \int y' dx \Rightarrow y = \int \left[\frac{w}{2EI}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) + C\right] dx$$

$$y = \frac{w}{2EI}\left(\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + Cx + D \quad (2)$$

گام سوم - رسم تغییر شکل تقریبی تیر و نوشتن شرایط مرزی



خط مماس در B

در رسم تغییر شکل تقریبی تیر به نکات زیر توجه کنید.

۱- جهت بارگذاری - چون جهت w به سمت پایین است، انتظار داریم نقطه B به سمت پایین جابجا شود.

۲- شرایط تکیه‌گاهی - چون تکیه‌گاه‌های A و C مفصلی و غلتکی هستند، مقدار جابجایی آنها صفر است $(\delta_A = \delta_C = 0)$ اما این تکیه‌گاه‌ها می‌توانند چرخش پیدا کنند یعنی $\theta_A \neq 0$ و $\theta_C \neq 0$

۳- انحناء تیر - با توجه به نمودار لنگر خمشی مشاهده می‌کنیم که M همواره مثبت است $(0 \leq M \leq \frac{wL^2}{8})$.

بنابراین طبق رابطه $y'' = \frac{M}{EI}$ انحناء تیر در سرتاسر آن مثبت یعنی به سمت بالا است.

اکنون شرایط مرزی را می‌نویسیم،

$$y = \frac{w}{2EI}\left[\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right] + Cx + D$$

نقطه A $\left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right.$ $\quad y(x=0) = \frac{w}{2EI}\left[0 - 0\right] + C(0) + D = 0$

$\rightarrow D = 0$

نقطه C $\left| \begin{array}{l} x = L \\ y = 0 \end{array}\right.$ $\quad y(x=L) = \frac{wl}{2EI}\left[\frac{L(L)^3}{3} - \frac{L^4}{12}\right] + CL + 0 = 0$

$$\rightarrow \frac{wL^4}{2EI}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = -CL \rightarrow C = \frac{-wL^3}{24EI}$$

تابع خیز $\quad y = \frac{w}{2EI}\left[\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right] - \frac{wL^3x}{24EI}$

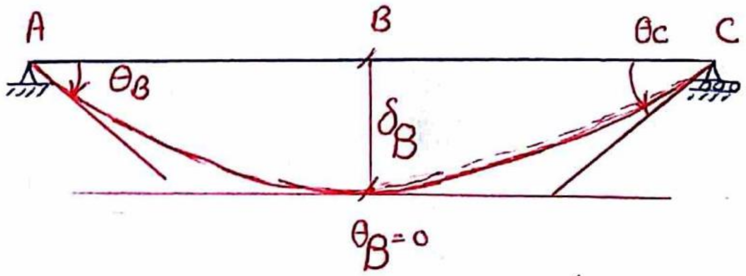
تابع شیب $\quad y' = \frac{w}{2EI}\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] - \frac{wL^3}{24EI}$

تمرین. درمسئله قبل مطلوب است محاسبه شیب و تغییرمکان در نقاط C و B ، A

$$y = \frac{w}{2EI}\left[\frac{Lx^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right] - \frac{wL^3x}{24EI} \rightarrow y = \frac{wL^4}{24EI}\left[-\left(\frac{x}{L}\right) + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 - \left(\frac{x}{L}\right)^4\right]$$

$$y' = \frac{w}{2EI}\left[\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] - \frac{wL^3}{24EI} \rightarrow y' = \frac{wL^3}{24EI}\left[-1 + 6\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

node	$A(x=0)$	$B(x=\frac{L}{2})$	$C(x=L)$
y	0	$-\frac{5wL^4}{384}$	0
y'	$-\frac{wL^3}{24EI}$	0	$\frac{wL^3}{24EI}$
$\frac{M}{EI}=y''$	0	$\frac{wL^2}{8EI}$	0



با توجه به تقارن مشاهده می‌شود که:

1) $\theta_C = -\theta_A$

2) $\delta_B = \delta_{max}$

3) $\theta_B = 0$